ISSN 2307-9770. Engineering and Educational Technologies, 2023, 11 (1), 46–66.

DOI https://doi.org/10.32782/2307-9770.2023.11.01.04
UDC 372.851:[004.94:514.11]

Preparing students for solving geometric problems of the EIA in mathematics by means of GeoGebra

Kunicheva T.*

Separate structural unit "Kharkiv Trade and Economics College of the State Trade and Economics University", Kharkiv, Ukraine

Received: *07.03.2023* ***Accepted***: *21.03.2023*

Abstract. The work demonstrates the possibility of using the GeoGebra computer geometry system to create interactive demonstrations (including 3D ones). For this purpose, a selection of examples of problems of the external independent assessment (EIA) in mathematics was used. The created demonstrations are aimed at developing students' ability to generalize, as well as their spatial imagination and thinking. The analysis of sources correlating with the subject of this publication has been carried out. Special attention is paid to works that present various approaches to the application of the GeoGebra system in solving problems of various types, especially problems of EIA in mathematics. Also, attention is focused on the cognitive-visual approach and its practical implementation, which requires the widespread use of various visual aids (including computer ones) in the educational process. Thus, the purpose of this work is to consider the use of the GeoGebra system as a mean of creating interactive demonstrations for visualization and subsequent work with the EIA educational material (generalization of theorems and solving stereometric problems). The paper analyzes typical EIA tasks that are effectively solved by GeoGebra tools. A theorem that combines three theorems that are traditionally presented separately in the school mathematics (on the ratio of products of segments of chords, secants and tangents) is considered. An interactive 2D demonstration has been created for its analysis. An example of a more efficient solution of the EIA problem using this theorem is also given. For EIA tasks related to the construction of bodies of revolution due to the rotation of flat figures around a given axis, 3D demonstrations have been created. They allow the resulting bodies to be observed as they are formed from different points of view, which enables students to learn to distinguish between these and similar bodies in the projection drawing (i. e. as they are shown in the EIA problems). Other 3D demonstrations are intended to facilitate learning the recognition polyhedron and determination their characteristics. These processes are based on the analysis of the relevant nets. The process of folding up and unfolding the nets is also demonstrated in dynamics. For typical EIA problems devoted to the study of the relative position of secant planes and lines in a cube or a rectangular parallelepiped, 3D demonstrations have also been developed that allow you to search visually for solutions to these problems or check answers. Brief methodological recommendations have been formed to the created interactive demonstrations. They give students the opportunity to work with these visualizations using a cognitive-visual approach. This will increase the effectiveness of preparation for solving problems of this type when passing the EIA test in mathematics. Further research on the development of the considered approach (interactive demonstrations along with methodological recommendations for their use) will help to increase the efficiency of using the GeoGebra computer geometry system in the educational process in any of its forms.
Key words: visualization, interactive demonstration, cognitive-visual approach, stereometric problems, nets of polyhedron, body of revolution.

Підготовка здобувачів освіти до розв'язування геометричних задач ЗНО з математики засобами GeoGebra

Кунічева Т. П.

ВСП «Харківський торговельно-економічний фаховий коледж Державного торговельно-економічного університету», Харків, Україна

Анотація. У роботі на добірці прикладів задач ЗНО з математики продемонстровано можливість використання системи комп'ютерної геометрії GeoGebra для створення інтерактивних демонстрацій (у тому числі 3D),

*

Corresponding Author: Kunicheva Tetiana Petrivna. Phone: (050)-951-8110. E-mail: tatkunicheva1@gmail.com
Separate structural unit "Kharkiv Trade and Economics College of the State Trade and Economics University", Otakar Jaroš lane, 8, Kharkiv, Ukraine, 61045.

Відповідальний автор: Кунічева Тетяна Петрівна. Тел. (050)-951-8110. E-mail: tatkunicheva1@gmail.com
ВСП «Харківський торговельно-економічний фаховий коледж Державного торговельно-економічного університету», пров. О. Яроша, 8, м. Харків, Україна, 61045.

спрямованих на розвиток здатності до узагальнення, а також просторових уяви та мислення учнів. Проведено аналіз джерел, що корелюють із тематикою даної публікації. Окрему увагу приділено публікаціям, у яких представлені різні підходи до застосування системи GeoGebra під час розв'язування задач різних типів, особливо задач ЗНО з математики. Також увагу акцентовано на когнітивно-візуальному підході та його практичній реалізації, яка потребує широкого використання в освітньому процесі різних засобів наочності (у тому числі комп'ютерних). Таким чином, мета даної роботи – розглянути використання системи GeoGebra як засобу створення інтерактивних демонстрацій для візуалізації та подальшої роботи з навчальним матеріалом ЗНО (узагальнення теорем та розв'язування стереометричних задач). У роботі проаналізовано типові задачі ЗНО, які ефективно розв'язуються засобами GeoGebra. Розглянуто теорему, що поєднує три теореми, які в шкільному курсі математики традиційно викладаються окремо – про співвідношення добутків відрізків хорд, січних і дотичних. Для її аналізу створено інтерактивну 2D демонстрацію. Наведено також приклад ефективнішого розв'язання задачі ЗНО за допомогою цієї теореми. Для задач ЗНО, пов'язаних із побудовою тіл обертання за рахунок обертання плоских фігур навколо заданої осі, створені 3D демонстрації. Вони дозволяють спостерігати результуючі тіла з різних точок зору під час їх формування. Це дає учням можливість навчитися розрізняти ці та аналогічні тіла на проекційному кресленні (як вони наведені в задачах ЗНО). Інші 3D демонстрації призначені сприяти навчанню розпізнавання багатогранників та визначення їх характеристик на основі аналізу відповідних розгорток. Процес розгортання та згортання розгорток також демонструється в динаміці. Для типових завдань ЗНО, присвячених дослідженню взаємного розташування січних площин і прямих у кубі або прямокутному паралелепіпеді також розроблені 3D демонстрації, що дозволяють наочно шукати розв'язки цих задач або перевіряти відповіді. До створених інтерактивних демонстрацій сформовано короткі методичні рекомендації. Вони надають учням можливість працювати з цими візуалізаціями, використовуючи когнітивно-візуальний підхід. Це підвищує ефективність підготовки до розв'язування задач такого типу під час проходження тесту ЗНО з математики. Подальші дослідження щодо розвитку розглянутого підходу (інтерактивні демонстрації плюс методичні рекомендації відносно їх використання) допоможуть підвищити ефективність застосування системи комп'ютерної геометрії GeoGebra в навчальному процесі в будь-яких його формах.
Ключові слова: візуалізація, інтерактивна демонстрація, когнітивно-візуальний підхід, стереометричні задачі, розгортка многогранника, тіло обертання.

I Вступ

Серед задач Зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики є така категорія геометричних задач, що постійно викликають проблеми в учасників тестування. Це стереометричні задачі, які для свого розв'язання вимагають розвиненої просторової уяви та уміння розумово оперувати з об'єктами в просторі. Традиційно задачі такого типу розв'язуються на проекційному кресленні. В такому ж вигляді вони надаються й в зошитах сертифікаційної роботи з математики. Навчання розв'язуванню таких задач потребує значних зусиль та часу. В сучасних умовах широкого вимушеного застосування дистанційного навчання та, відповідно, відірваності учнів від вчителів далеко не завжди можна вирішити виникаючі при цьому проблеми.

Тому дуже актуальним є використання для навчання розв'язуванню таких задач та попутного розвитку просторової уяви сучасних пакетів динамічної геометрії – зокрема, GeoGebra [1]. GeoGebra забезпечує інтерактивне середовище для навчання та для спільної роботи учня та вчителя [6]. Інтеграція цього пакету в схему навчання може допомогти покращити навички та знання учнів у математичних курсах різної спрямованості. Наявний аналіз комп'ютерних інструментів програми динамічної математики GeoGebra дозволяє ефективно використовувати її для розв'язування задач стереометрії [29]. Зокрема, для побудови розгорток та геометричних місць точок (ГМТ). Наводяться також приклади інших стереометричних задач, які супроводжуються детальним розв'язуванням і методичним коментарем і які доцільно розв'язувати за допомогою системи GeoGebra.

В літературі [10] наголошується важливість комплексного, системного підходу в сприйнятті та використанні пакета GeoGebra, а також розкритті його дидактичних та когнітивних можливостей, спрямованих, у тому числі, на розв'язування традиційних задач та методичних проблем, що мають місце при вивченні геометрії. Це робить актуальним використання сучасного специфічного принципу дидактики – принципу когнітивної візуалізації, який інтегровано з двох методологічних підходів: когнітивного та візуального [32]. Там же продемонстровано, як саме використання цього принципу сприяє формуванню математичних понять, розвитку критичного та творчого мислення суб'єктів навчального процесу. Практична реалізація когнітивно-візуального підходу вимагає широкого використання в освітньому процесі різних засобів наочності (в тому числі комп’ютерних), які є основою для розвитку візуального мислення учнів. Використання когнітивно-візуального (зорово-пізнавального) підходу до формування знань, умінь та навичок учнів дозволяє максимально використовувати потенційні можливості візуального мислення. Одне з основних положень цього підходу – широке та цілеспрямоване використання пізнавальної функції наочності. При цьому передбачається наявність як традиційних наочних засобів, так і спеціальних засобів і прийомів, що дозволяють активізувати роботу зору (в тому числі й системи комп’ютерної математики GeoGebra). За рахунок впровадження інтерактивного середовища, яке забезпечує різні функції наочності на уроці та позакласних заняттях з математики, відбувається підвищення ефективності навчання геометрії в школі. Наголошується на перевагах застосування GeoGebra при навчанні побудові просторових тіл та їх перерізів у порівнянні з традиційним навчанням. Моделювання математичних об’єктів та спостереження за процесом їх динамічних змін за допомогою інтерактивних креслень програми GeoGebra дозволяють формувати в учнів вміння виділяти характерні ознаки, встановлювати закономірності, робити узагальнення, висувати гіпотези та сприяти розвитку пізнавальної активності учнів вносячи в навчальний процес важливі елементи наукової роботи [2, 8].

Але треба відмітити, що нажаль ще існує багато випадків неповноцінного використання систем динамічної геометрії. При цьому ілюстрації до завдань, які виконані засобами GeoGebra, розглядаються як деякі статичні рисунки, просто виконані в більш зручний спосіб. Тобто в таких джерелах майже немає рекомендацій, як з цими динамічними малюнками учень (або вчитель) має працювати в реальності. Також теореми або задачі, що розглядаються, беруться в тому ж вигляді, як у підручнику. Тобто не здійснюються спроби виконувати якісь їх додаткові об’єднання або систематизації, якщо навіть така можливість є. Щоб уникати таких ситуацій можна скористатись наведеною в [34] теоретичною моделлю дослідницького навчання в стилі експериментальної математики з урахуванням характеристик змістовних та технологічних основ її реалізації (в тому числі й на основі використання пакета GeoGebra).

У [30] наводяться приклади розв’язання задач на побудову геометричних місць точок у тривимірному просторі, а також алгоритми таких побудов. Надаються методичні рекомендації щодо створення та аналізу динамічних конструкцій. Описані розв’язання не лише спрощують сприйняття складного стереометричного матеріалу, а й збагачують арсенал учнів емпіричним методом розв’язування задач на пошук ГМТ. Це важливо з огляду на інформатизацію суспільства та його запити щодо фахівців, які володіють вміннями моделювати проблеми, візуалізувати пошук розв’язку та навичками аналізувати задачі, в тому числі ті, що зводяться до стереометричних задач на ГМТ.

Оволодіння способами побудови в середовищі GeoGebra локусу точки (тобто її динамічного графіка в залежності від зміни деякого параметра або положення іншої точки) дозволяє візуалізувати математичні об’єкти та створювати їх динамічні моделі. Розв’язувати задачі на ГМТ у програмах динамічної математики можна також за допомогою використання параметричного кольору. У [31] розглядаються особливості його встановлення та використання. Додатково пропонується перелік задач, які можна розв’язувати за допомогою описаного підходу.

Суттєво розширює сприйняття просторових об’єктів учнями та, відповідно, їх просторову уяву детальний розгляд тіл обертання, які утворюються обертанням не лише плоских фігур, як традиційно розглядається в шкільному курсі математики, але й інших.

Важливим є навчання переходу від плоских фігур до об’ємних тіл та навпаки, тобто роботі з розгортками. Оскільки питання про множинність розгорток куба та, відповідно, інших тіл є актуальним в контексті розв’язування задач ЗНО. Оскільки розгорток кожного многогранника існує декілька (причому, зовні дуже різних), то учень може сплутати, скажімо, бічні грані та основи тіла та, відповідно, невірно його розпізнавати, обчислювати не ту площу тощо. Як наслідок, задачу №16 із ЗНО 2014 року правильно розв’язали близько 45% учасників [27]. Інші, швидше за все, не розпізнали, яку площу потрібно обчислювати. Задачу №15 із ЗНО 2018 року вірно розв’язали близько 40% учасників [24]. В той же час задачу №5 за 2019 рік правильно розв’язали близько 95% учасників [25]. Це була задача на розпізнавання тіла по його розгортці, але це було завдання із серії «втішних». За наявності іншої розгортки та, відповідно, більш схожих зовні тіл ми мали б суттєво нижчий відсоток тих, хто цю задачу розв’язав.

Побудова розгортки за тілом (певним многогранником) також дуже корисна, оскільки може викликати краще розуміння того, звідки та як розгортка взагалі виникає, оскільки здійснюється операція, зворотна до тієї, що має виконуватися під час розв’язування задач ЗНО – відтворення многогранника за

ISSN 2307-9770. Engineering and Educational Technologies, 2023, 11 (1), 46–66.

розгорткою. Комплексний підхід до проблеми – детальний розгляд просторових тіл, для яких учні малювали на папері різні проекції та розгортки, а потім будували ці тіла за допомогою GeoGebra – здійснено в [5] (із подальшим аналізом результатів навчання). Учні здійснювали обертання фігур у думці, перевіряючи потім отримані результати засобами GeoGebra. Виконання таких завдань дозволило суттєво покращити просторові здібності учнів. Побудову перетинів просторових поверхонь засобами GeoGebra продемонстровано в [4]. Також розглянуто застосування результатів дослідження в навчальному процесі. У зв'язку з цим, з урахуванням зазначених можливостей GeoGebra, є актуальним та доцільним розгляд її використання для аналізу стереометричних задач ЗНО з математики з метою їх подальшого розбору з майбутніми учасниками ЗНО.

Мета роботи: розглянути використання системи GeoGebra як засобу створення інтерактивних демонстрацій для візуалізації й подальшої роботи з навчальним матеріалом ЗНО (узагальнення теорем та розв'язування стереометричних задач).

II Матеріал і методи дослідження

У роботі були використані загальнонаукові методи дослідження: аналіз, синтез та моделювання. Метод аналізу застосований для вивчення змісту *Програми зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти* [28] та діючих шкільних підручників з геометрії. Синтетичний метод та метод моделювання використані для розробки інтерактивних демонстрацій для вибраних стереометричних задач ЗНО з математики та методичних порад з використання цих демонстрацій.

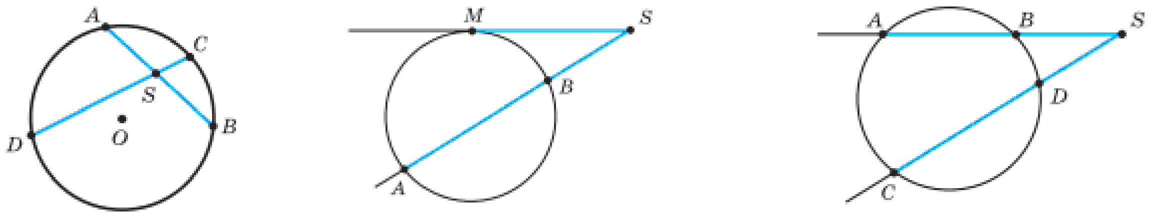
Далі розглядаються розв'язувані задачі, інтерактивні демонстрації для них, та методичні поради з їх використання. Для цього будемо використовувати систему динамічної геометрії GeoGebra.

III Результати

Розглянемо практичне застосування запропонованого підходу (використання пакету GeoGebra) на деяких задачах ЗНО.

Приклад 1. Узагальнення теорем про співвідношення відрізків хорд, січних та дотичних.

Спочатку згадаємо самі теореми, як вони викладені в підручниках (див., наприклад, [7, 13], а також довідник [23] – розділи «Коло, хорди і дуги» та «Коло, дотичні й січні») – рис. 1.



Добутки відрізків хорд одного кола, що перетинаються, рівні: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$

Добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї самої точки:

$$PA \cdot PB = PM^2$$

Добуток однієї січної на її зовнішню частину дорівнює добутку іншої січної на її зовнішню частину, якщо ці січні проведені з однієї точки поза колом:

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP .$$

Рис. 1. Теореми про співвідношення відрізків хорд, січних та дотичних

Ці теореми також згадуються в «Програмі зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти» (розділ «Планіметрія» теми «Геометрія») [28]. Тобто, учні повинні мати на увазі, що якісь задачі, пов'язані із цими теоремами, можуть з'явитись на ЗНО.

Зазвичай ці теореми розглядаються в шкільному курсі у 8-му класі. На час проходження ЗНО учні все це, як правило, забувають. Крім того, як видно з підручників, що цитуються, згадані теореми розглядаються як окремі задачі, що вносить додаткову плутанину в їх сприйняття. Тому для їхнього безумовного засвоєння та подальшого використання слід звернутися до їхнього інтегрованого викладу [3] з подальшим узагальненням за допомогою середовища GeoGebra.

Якщо ми домовимося розглядати дотичну як граничне положення січної, то зможемо поєднати всі ці 3 теореми таким чином:

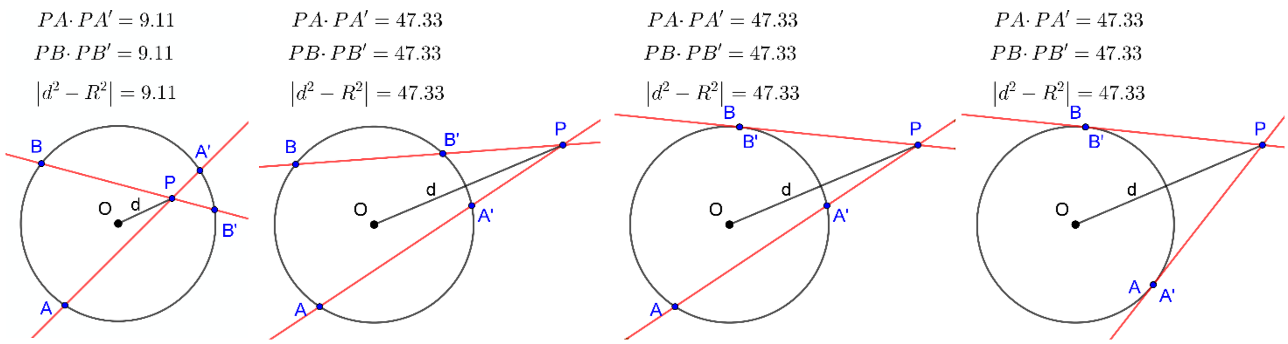
Теорема. Якщо дві прямі, що проходять через точку P, перетинають коло: одна – в точках A та A' (які, можливо, співпадають), а інша – в точках B і B' (також можуть співпадати), то

$$|PA|\cdot|PA'|=|PB|\cdot|PB'|=\left|d^2-R^2\right|, \qquad (*)$$

де $\Pi(P)=d^2-R^2$ – степінь точки P відносно кола.

Таким чином, для будь-якого кола радіуса R і будь-якої точки P, що знаходиться на відстані d від центру, число d^2-R^2 називається *степенем* точки P відносно кола. Цей степінь є додатнім числом, коли точка P лежить поза колом, нулем, коли точка P лежить на колі, та від'ємним числом, коли точка P лежить в середині кола. Як ми бачимо з $(*)$ формулювання теореми не змінюється в залежності від положення точки P відносно кола. Крім того, оскільки розглядається добуток відрізків, обмежених заданою точкою P з одного кінця та точкою перетину січної з колом – з іншого, то ми маємо загальне правило, яке легко запам'ятовується. У шкільному курсі математики поняття «степінь точки відносно кола», на жаль, не вводиться, що й призводить до поділу фактично однієї теореми на три окремих. Крім того, введення цього поняття дозволило б розширити спектр задач, пов'язаних із взаємним розташуванням кола та прямих і більш глибоко його закріпити.

Розглянемо об'єднаний варіант цієї теореми. Це легко зробити за допомогою середовища GeoGebra (рис. 2).



а)Точка в середині кола. Дві хорди | б) Точка поза колом. Дві січні. | в) Точка поза колом. Січна та дотична | г) Точка поза колом. Дві дотичні

Рис. 2. Ілюстрації для теореми $(*)$ з різними положеннями точки відносно кола

Як ми бачимо, незалежно від положення точки добуток відповідних відрізків хорд, січних або дотичних дорівнює модулю ступеня точки P відносно кола. Крім того, з рис. 2 г) видно, що ми поступово прийшли до відомої теореми про коло, вписане в кут, тільки з іншого боку. Цю теорему можна використовувати для розв'язування задачі ЗНО, зокрема задачі №26 із пробного ЗНО з математики за 2019 рік [33] (рис. 3). В зошиті ЗНО ця задача оформлена як питання відкритої форми. Тобто, учаснику потрібно лише вписати числа-відповіді на питання. Сам детальний опис розв'язку не потрібен, тому учасник може його не записувати. Але він обов'язково має відзначати для себе обґрунтованість тих чи інших фактів і тверджень. Таким чином, найбільш прийнятним в даному випадку є той спосіб розв'язування задачі, який вимагатиме мінімум часу при найбільшій захищеності від можливих помилок. А заощаджений час знадобиться учаснику для розв'язування більш складних задач, для яких потрібне оформлення з детальним описом (це декілька останніх задач зошита ЗНО вагою до 6 балів).

26. На рисунку зображено прямокутник $ABCD$ та півколо з центром O. AD – діаметр півкола. $BK : KM = 1 : 3$, $AB = 4$ *см*.

1. Визначте радіус півкола (у *см*).
2. Обчисліть площу трикутника KOM (у *см*^{2}).

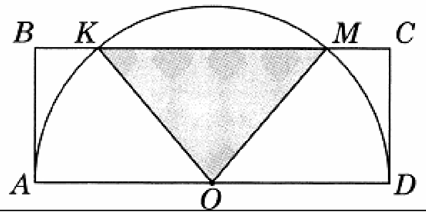
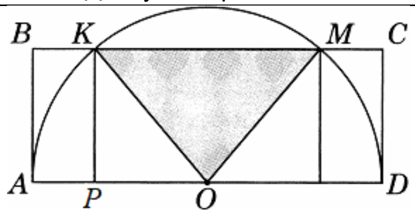
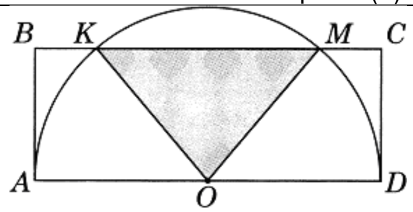
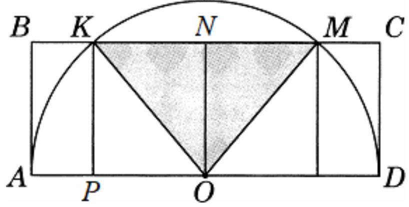


Рис. 3. Задача №26 із пробного ЗНО з математики за 2019 рік [33]

Таблиця 1. Порівняння розв’язку задачі №26 пробного ЗНО 2019 року на основі теореми Піфагора та теореми (∗)

Доступний розв’язок	Розв’язок на основі теореми (∗)
 **1.** Визначаємо радіус півкола (у *см*). Проведемо два перпендикуляри з точок K і M до AD, звідси $PK = AB = 4$ *см*. Нехай $BK = MC = x$ *см*, тоді $KM = 3x$ *см*, а $BC = AD = x + 3x + x = 5x$ *см*. $AO = KO = r = 5x : 2 = 2{,}5x$ *см*. $PO = AO - AP = 2{,}5x - x = 1{,}5x$ *см*. З ΔKOP $(\angle P = 90°)$ за теоремою Піфагора маємо: $KO^2 - PO^2 = PK^2$ ($PK = AB = 4$ *см*). $(2{,}5x)^2 - (1{,}5x)^2 = 4^2$, $6{,}25x^2 - 2{,}25x^2 = 16$, $4x^2 = 16$, $x^2 = 4$, $x = 2$. $AO = KO = r = 2{,}5x = 2{,}5 \cdot 2 = 5$ *см*. Відповідь: 5.	 1. Визначаємо радіус півкола (у *см*). Нехай $BK = x$ *см*, тоді $KM = 3x$ *см*. BA – дотична ($BA \perp AO$), BC – січна. Отже: $BA^2 = BK \cdot BM$ $BA^2 = BK \cdot BM$, $4^2 = x \cdot (x + 3x) \Rightarrow 16 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 2$ *см*. $AO = BK + \frac{KM}{2} = 2{,}5x = 5$ *см*. (Тут при обчисленні радіуса до відрізка BK було додано половину хорди KM). Відповідь: 5.
2. Обчислюємо площу трикутника KOM (у *см*^{2}).  Розглянемо ΔKOP. Проведемо його висоту $ON = KP$. Отже $S_{\Delta KOM} = \frac{1}{2} KM \cdot ON$, $KM = 3x = 3 \cdot 2 = 6$ *см*, $S_{\Delta KOM} = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12$ *см*^{2}. Відповідь: 12.	2. Обчислюємо площу трикутника KOM (у *см*^{2}). Його площа дорівнює половині добутку основи ($KM = 3x = 6$ *см*) на висоту AB (оскільки $BC \parallel AD$ і довільний спільний перпендикуляр до цих прямих буде висотою трикутника KOM): $S_{\Delta KOM} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ *см*. Відповідь: 12.

ISSN 2307-9770. Engineering and Educational Technologies, 2023, 11 (1), 46–66.

Порівняємо (див. табл. 1) спосіб на основі теореми (∗) з доступними нам розв'язками цієї задачі (див., наприклад, [22] або коментарями до задачі №26 в [15]). Як ми бачимо, поширений розв'язок цієї задачі зводиться до додаткових побудов та застосуванню теореми Піфагора. Розв'язок досить громіздкий, тому його прийдеться записувати на папері та виконувати письмово всі потрібні обчислення. Заощадити на цьому час не вийде оскільки ми тут маємо справу із дробовими коефіцієнтами, й нехтування цим фактом може спровокувати помилки. А от у разі використання теореми (∗) всі необхідні перетворення можна виконати усно. До того ж можна спростити процес знаходження площі трикутника (не виконувати додаткових побудов).

Приклад 2. Задачі на обертання плоскої фігури.

В Інтернеті зустрічаються моделі із ЗНО, виконані в системі GeoGebra. Проте, багато з них присвячені розв'язанню рівнянь, побудові графіків тощо [11, 17–20]. Моделі, присвячені геометрії (особливо стереометрії) в основному демонструють готову картинку без будь-якого аналізу. У учня виникає відчуття звичайного мультфільму. Звісно, якщо дивитися на готове креслення до задачі, то розуміння того, як цю задачу розв'язувати, не додасться.

Серед задач ЗНО час від часу з'являються задачі на перевірку просторового мислення. Вони, як правило, пов'язані з побудовою в уяві об'ємних тіл за їх плоскими зображеннями (обертання плоскої фігури навколо деякої осі, використання розгорток тощо) або із взаємним розташуванням січних площин та прямих у кубі. Розглянемо деякі найхарактерніші з них. А також подивимось, яким чином можна використовувати пакет GeoGebra для навчання розв'язуванню таких задач.

Задача №21 із ЗНО 2013 р., перша сесія [26] – див. рис. 4.

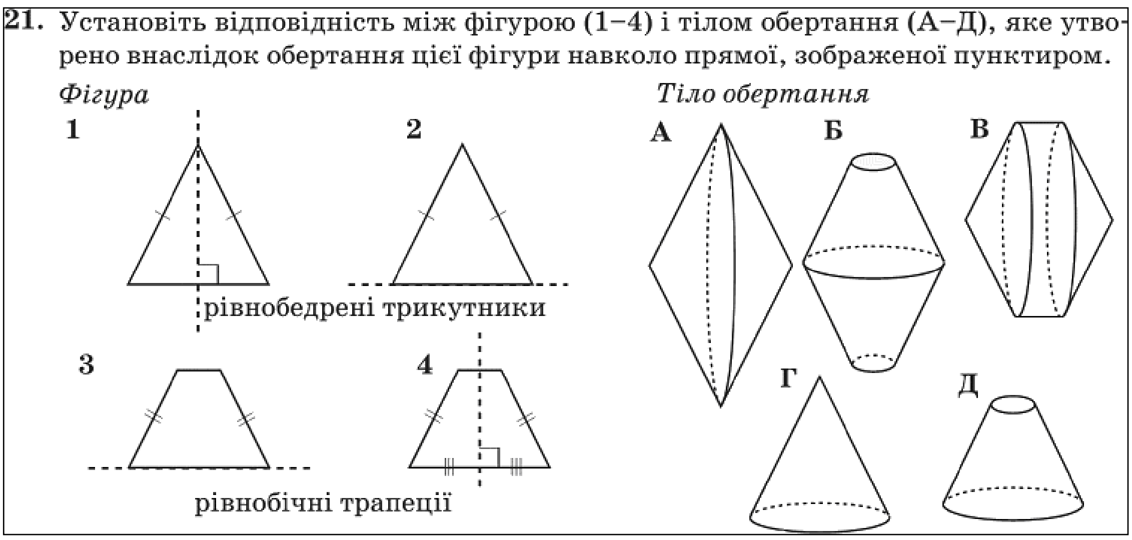


Рис. 4. Задача №21 із першої сесії ЗНО з математики за 2013 рік [26]

Створюємо плоскі фігури, які вказані в задачі (при цьому обов'язково виділяємо точки-вершини), а потім обертаємо їх навколо заданої осі. Обертання плоских фігур відбувається за допомогою бігунка із заданим кроком (рис. 5). Цю дію можна виконати автоматично, ввімкнувши анімацію. Після цього на полотні 3D отримуємо шукані тіла обертання (рис. 6). Всю конструкцію можна обертати, і тоді, за рахунок часового паралакса, ми матимемо не просто площинний умовний малюнок об'ємних тіл, а реальне об'ємне сприйняття всієї конструкції [9]. Можна її розглянути з різних боків, щоб чітко уявити, яке об'ємне тіло вийшло в результаті обертання плоскої фігури, чому й як. А також порівняти її з варіантами відповіді із завдання (рис. 4). Це дозволить учневі не лише навчитися уявляти просторові тіла як результат розумового обертання плоских, а й співвідносити отриманий результат із пропонованими зразками із умови задачі (тобто розпізнавати їх), що дуже важливо.

Додатково зауважимо, що в даному випадку ми віддаємо перевагу ручному створенню тіл обертання перед вбудованим інструментом GeoGebra «Поверхні обертання (Surface of Revolution)». Справа в тому, що при ручному створенні ми можемо відслідкувати всі етапи цього процесу. Це дуже цінно з методичної точки зору, оскільки при проходженні тестування учасник має виконувати всі операції в умі , тому має заздалегідь цьому навчитись. Натомість, вбудований інструмент створює поверхню обертання зразу без можливості роздивитись сам процес більш детально.

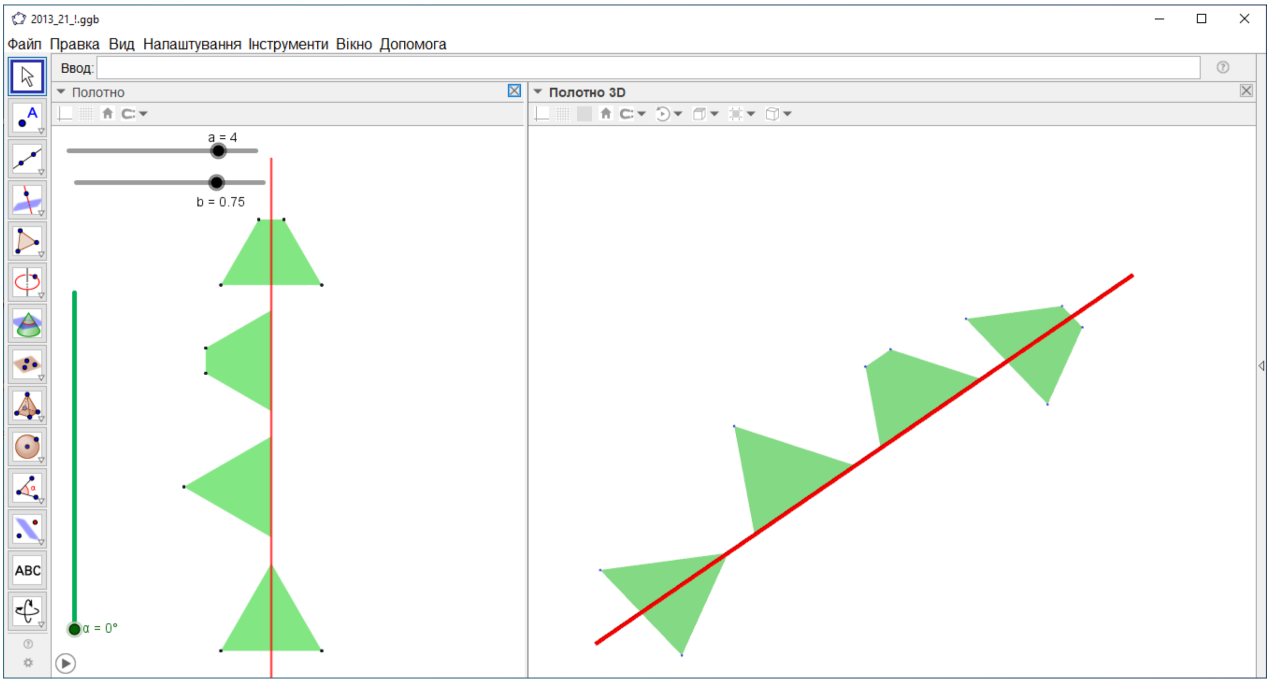


Рис. 5. Створені в GeoGebra плоскі фігури із задачі №21

Зверніть увагу, що кольорові точки – вершини плоских фігур – при обертанні утворюють кола, які візуально розділяють поверхні, що утворюють тіло обертання, й таким чином покращують сприйняття об'ємних тіл роблячи їх більш наочними. В такому вигляді їх легше зіставляти зі зразками, наведеними в умові задачі.

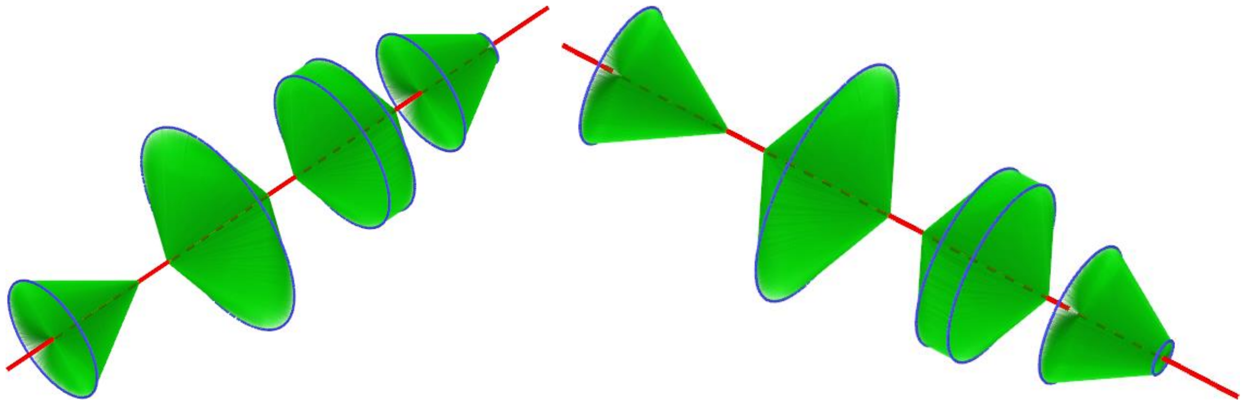
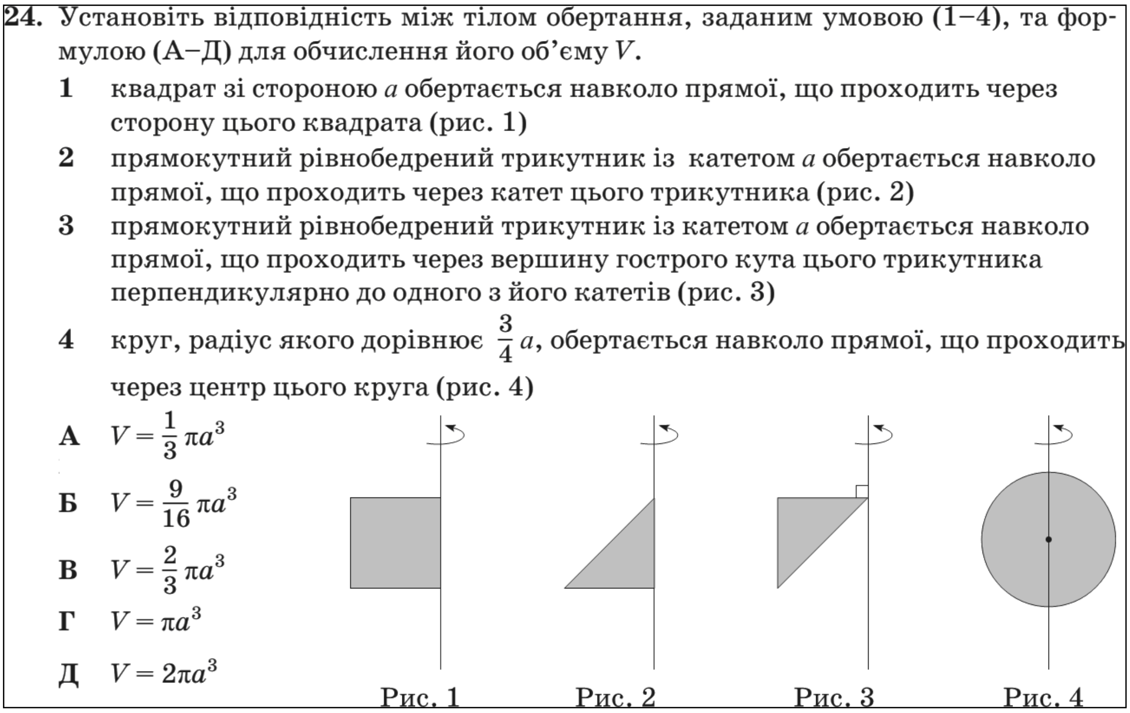


Рис. 6. Тіла обертання до задачі №21

Задача №24 із ЗНО 2013 р., друга сесія [26] – див. рис. 7.

Плоскі фігури до цієї задачі створюються за аналогією до попередньої (рис. 8). Тут ми також бачимо, які тіла обертання виходять (рис. 9). Але оскільки в цій задачі потрібно не просто розпізнати їх, а обчислити їх об'єм, то потрібно ці тіла розглянути уважніше, щоб не виконувати громіздких зайвих обчислень. Так, тіла 1, 2 та 4 (особливо після попередньої задачі) проблем не викликають. А ось із тілом 3 треба бути більш уважним.

ISSN 2307-9770. Engineering and Educational Technologies, 2023, 11 (1), 46–66.



24. Установіть відповідність між тілом обертання, заданим умовою (1–4), та формулою (А–Д) для обчислення його об'єму V.

1 квадрат зі стороною a обертається навколо прямої, що проходить через сторону цього квадрата (рис. 1)

2 прямокутний рівнобедрений трикутник із катетом a обертається навколо прямої, що проходить через катет цього трикутника (рис. 2)

3 прямокутний рівнобедрений трикутник із катетом a обертається навколо прямої, що проходить через вершину гострого кута цього трикутника перпендикулярно до одного з його катетів (рис. 3)

4 круг, радіус якого дорівнює $\frac{3}{4}a$, обертається навколо прямої, що проходить через центр цього круга (рис. 4)

А $V = \frac{1}{3}\pi a^3$

Б $V = \frac{9}{16}\pi a^3$

В $V = \frac{2}{3}\pi a^3$

Г $V = \pi a^3$

Д $V = 2\pi a^3$

Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

Рис. 7. Задача №24 із другої сесії ЗНО з математики за 2013 рік [26]

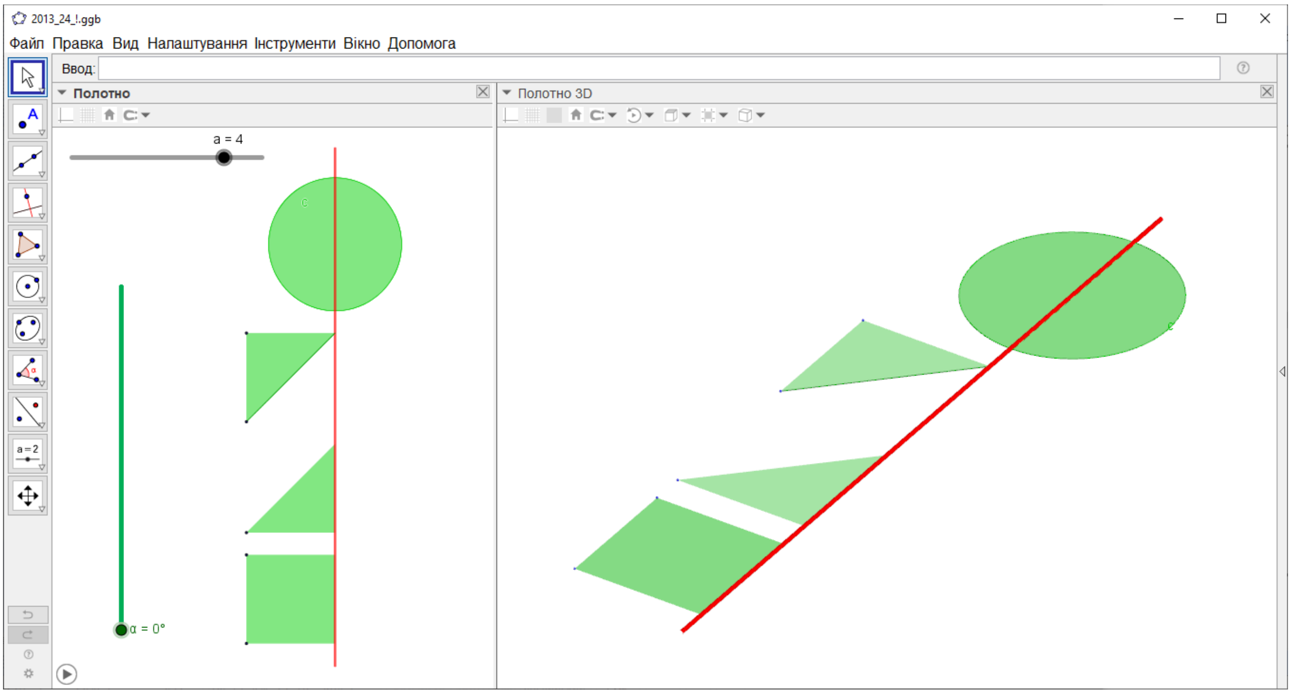


Рис. 8. Створені в GeoGebra плоскі фігури із задачі №24

Але після порівняння малюнків, що показують її з різних боків, стає видно, що це є циліндр, із якого вирізали конус. Тому й об'єм тіла 3 потрібно так обчислювати: об'єм циліндра мінус об'єм конуса. На жаль, зазвичай для учнів це тіло становить велику складність, оскільки воно належить до категорії тіл, коли потрібно побачити невидиме, тобто тіло, якого явно на кресленні немає (конус), але його врахування суттєво впливає на хід і результат розв'язання задачі (полегшує процес розв'язування, дозволяє уникнути помилок тощо).

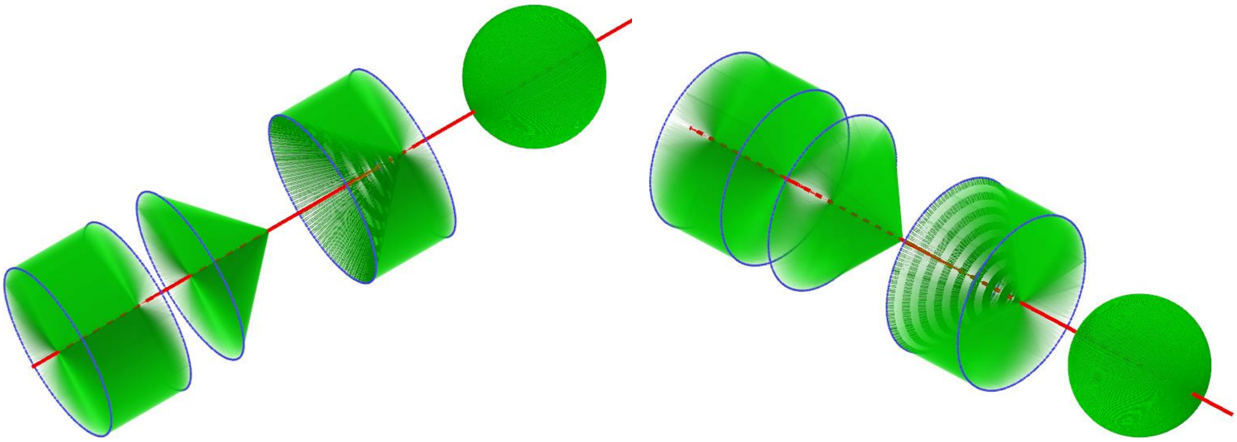


Рис. 9. Тіла обертання до задачі №24

Приклад 3. Задачі на використання розгорток.

Задачі на визначення площі бічної поверхні. Проблема в тому, що в заданому положенні розгортки просторове тіло може бути в довільній орієнтації, в тому числі й «на боці». Це може призвести до того, що учень правильно обчислить не ту площу. Тому він спочатку повинен уявити, як виглядає дане тіло, де в нього бічна поверхня, а потім вже обчислювати її. Складність тут у тому, що при згортанні розгортки в об'ємне тіло частина ребер об'єднується й «зникає». Тому дуже ефективною є демонстрація згортання та розгортання розгортки в режимі 3D. Робота з такими демонстраціями дозволить учням при складанні ЗНО вірно виконувати такі операції в умі. Розглянемо ці задачі більш детально. Зауважимо також, що розгортки тут (як і тіла обертання в попередньому прикладі) створювались вручну. Справа в тому, що вбудований інструмент GeoGebra створює розгортку в деякому «стандартному» (з його точки зору) вигляді. Тому вона не завжди співпадає з розгорткою, наведеною в умові задачі.

Задача №16 із ЗНО 2014 р. [27] (рис. 10).

16. На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 *см*, і чотирьох правильних трикутників.
Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди (у *см*^{2}).

А	Б	В	Г	Д
$100\sqrt{3}$	100	$400\sqrt{3}$	$100\cdot(1+\sqrt{3})$	200

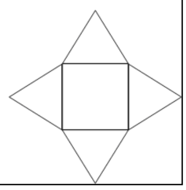


Рис. 10. Задача №16 із другої сесії ЗНО з математики за 2013 рік [27]

Не дивлячись на, здавалося б нескладну задачу, вірно відповіли менше половини учасників (рис. 11). Інші обчислили площу основи, повну площу, або обрали пункти В та Д, тобто, схоже, діяли взагалі навмання. Тому, навіть для таких простих тіл у задачах на розгортки, є потреба у створенні демонстрацій, за допомогою яких учні можуть попрацювати з розгортками в динаміці, детально роздивляючись процес їх виникнення.

Відповіді учасників (%)				
А*	Б	В	Г	Д
44,48	13,70	21,98	10,72	8,68

Рис. 11. Розподіл відповідей учасників на задачу №16 [27]

У цій задачі не сказано про конкретний вид піраміди, тому учень повинен зрозуміти, що квадрат лежить в її основі, а бічна поверхня складається з рівносторонніх трикутників. Продемонструємо це

ISSN 2307-9770. Engineering and Educational Technologies, 2023, 11 (1), 46–66.

наочно (рис. 12 та 13). Потрібно лише попередньо обчислити кут повороту фрагментів розгортки до повного замикання піраміди (це 180° мінус кут між основою та бічною гранню піраміди):

$$180^\circ - \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot 180^\circ = 180^\circ\left(1-\frac{\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)}{\pi}\right) \approx 125,264^\circ .$$

Рис. 12. Створена в GeoGebra розгортка із задачі №16 [27] з можливістю згортання в піраміду

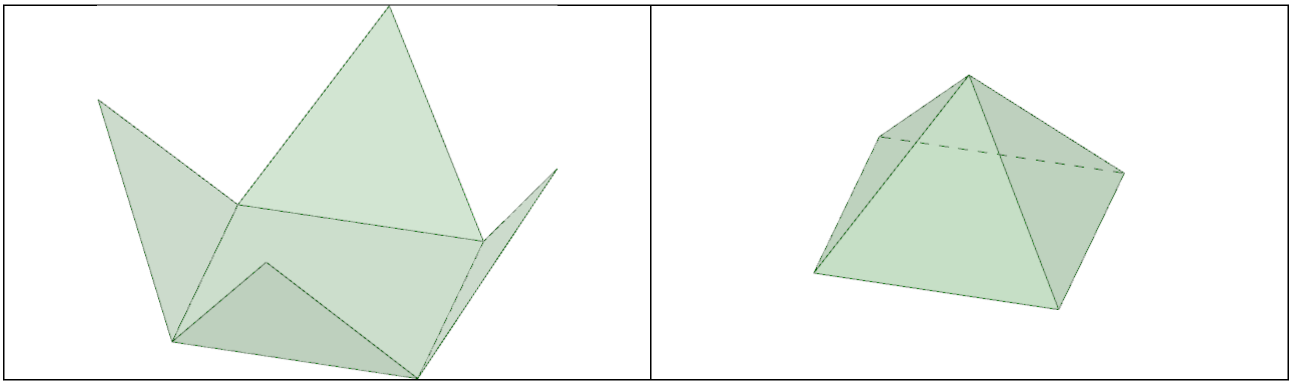


Рис. 13. Процес згортання розгортки в піраміду

Задача 15 із ЗНО 2018 р. [24] (рис. 14).

При згортанні розгортки в просторове тіло можна продемонструвати, що це справді трикутна призма, й її основою є трикутник, а прямокутники – це бічні сторони, й їх сумарна площа є величина, яку потрібно знайти за умовою задачі – рис. 15 та 16 а)–в).

У процесі обертання призми її можна покласти «на бік» демонструючи той факт, що незалежно від положення тіла в просторі вона залишається правильною трикутною призмою, й її основа та бічна поверхня залишаються тими ж самими – рис. 16 в) та г). Учні повинні на це звертати пильну увагу.

15. На рисунку зображено розгортку правильної трикутної призми. Визначте площу *бічної* поверхні цієї призми, якщо периметр розгортки (суцільна лінія) дорівнює 52 *см*, а периметр основи призми становить 12 *см*.

А	Б	В	Г	Д
36 $см^2$	48 $см^2$	60 $см^2$	72 $см^2$	96 $см^2$

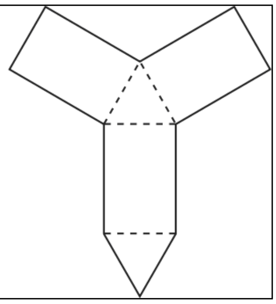


Рис. 14. Задача №15 із ЗНО з математики за 2018 рік [24]

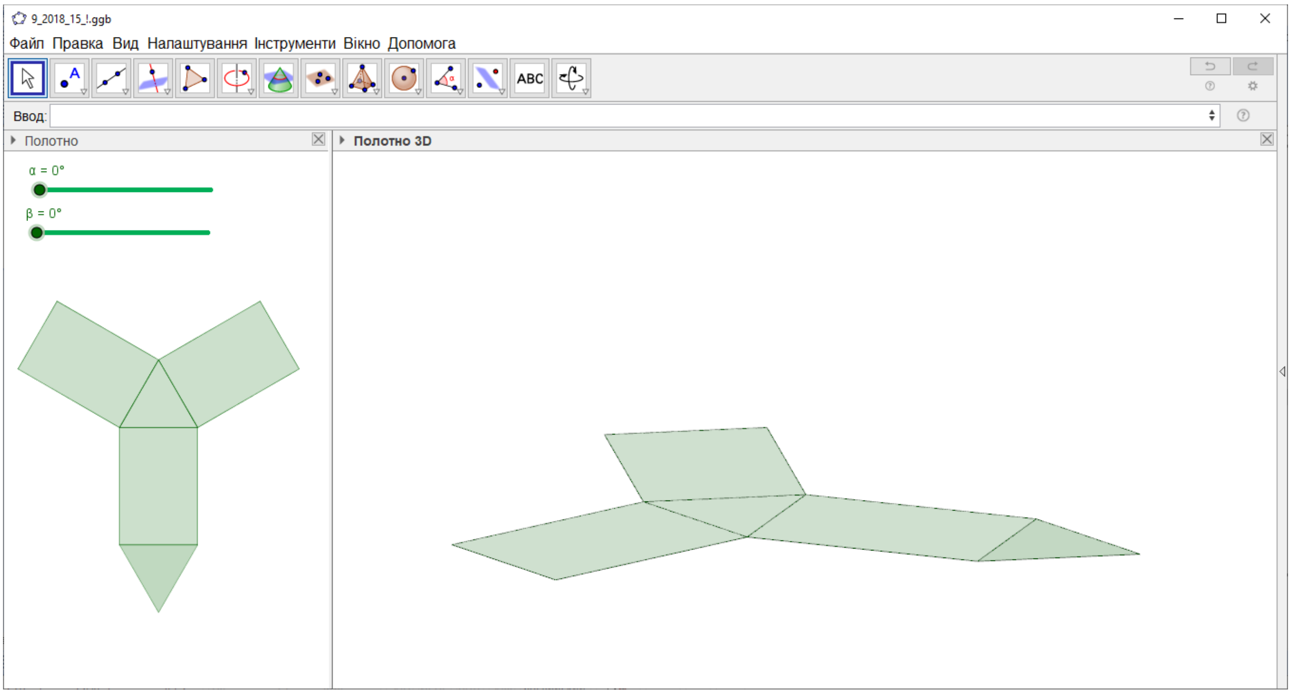


Рис. 15. Створена в GeoGebra розгортка із задачі №15 [24] з можливістю згортання в призму

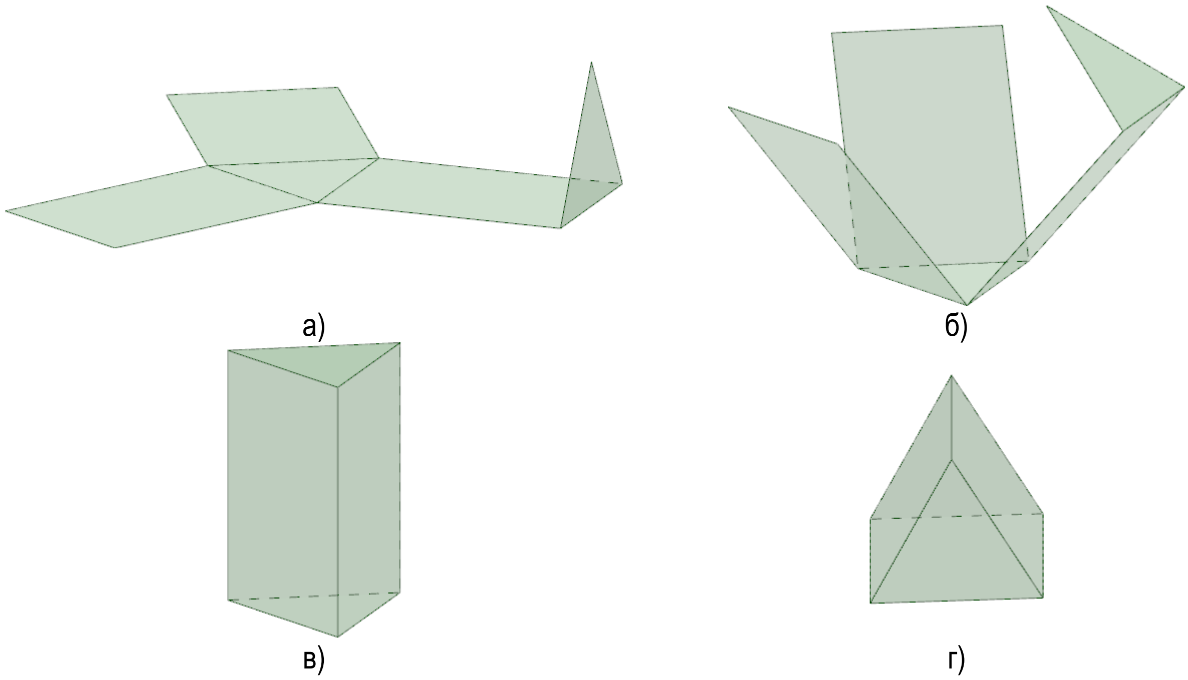


Рис. 16. Процес згортання розгортки в призму та подальшого її обертання

ISSN 2307-9770. Engineering and Educational Technologies, 2023, 11 (1), 46–66.

Задача 5 із ЗНО 2019 р.[25] (рис. 17).

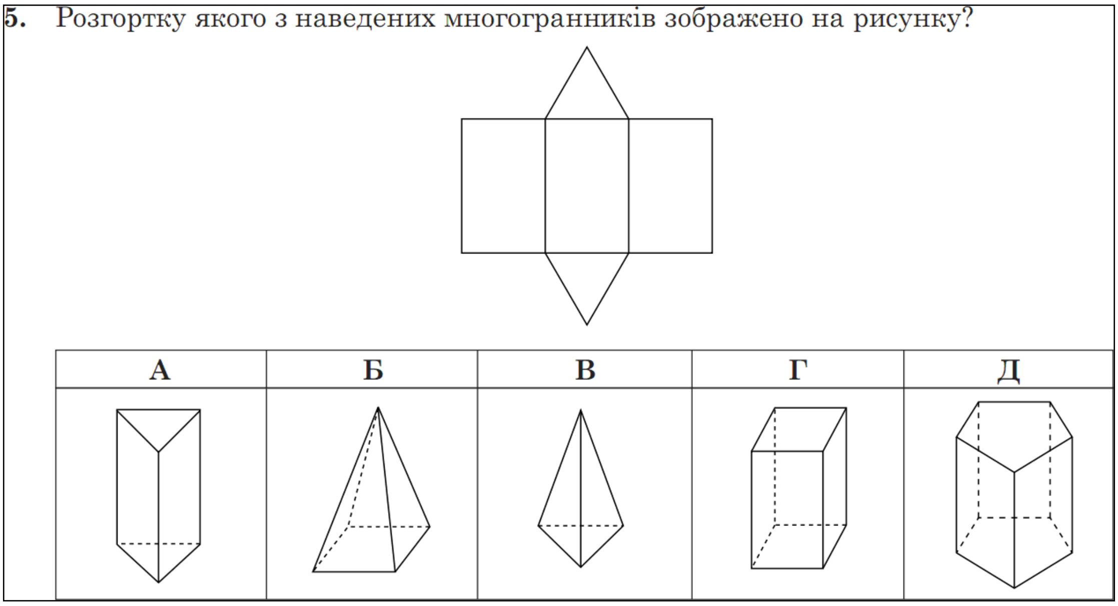


Рис. 17. Задача №5 із ЗНО з математики за 2019 рік [25]

Цю задачу вірно розв'язали близько 95% учасників [25]. Ми вважаємо, що такий їх успіх пов'язаний із тим, що, по-перше, схожа призма була в ЗНО роком раніше, а по-друге – всі дистрактори суттєво відрізняються від вірної відповіді. За більш коректного складання цього питання відсоток вірних відповідей міг би бути суттєво меншим (можна було б, скажімо, задати певне тіло, а в якості варіантів відповідей – різні розгортки).

Створення та опрацювання розгортки виконується за аналогією з попередніми задачами.

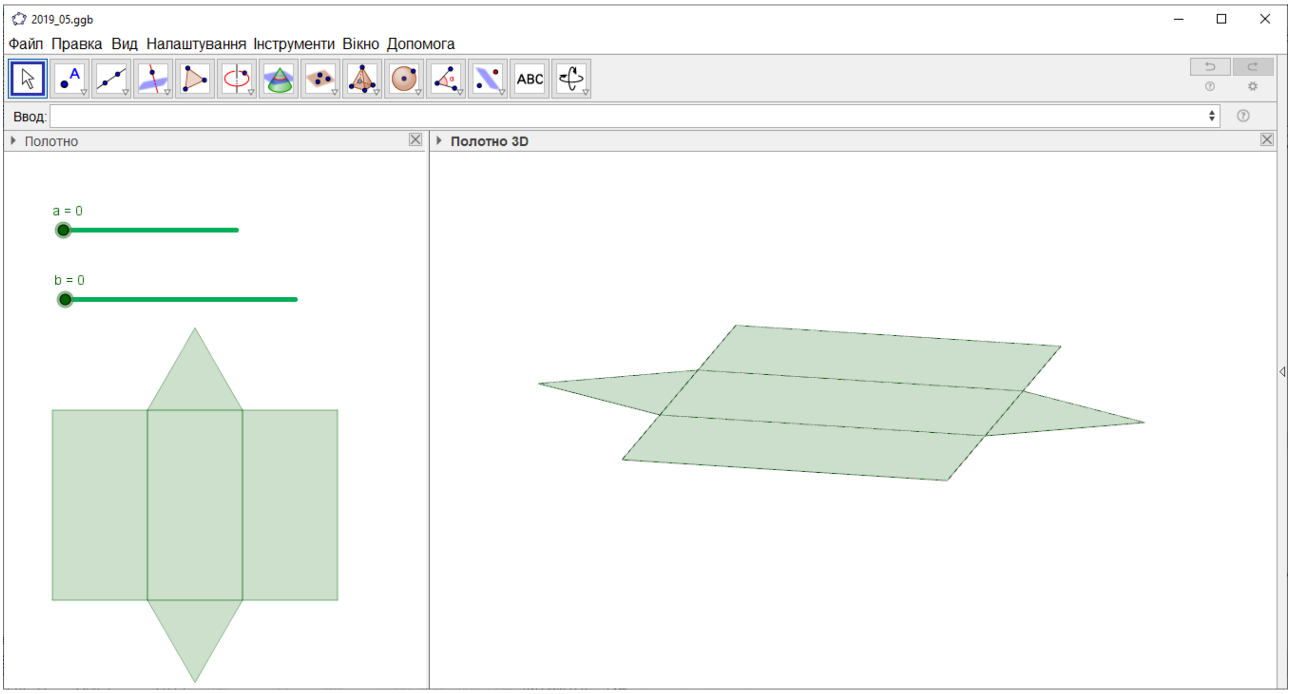
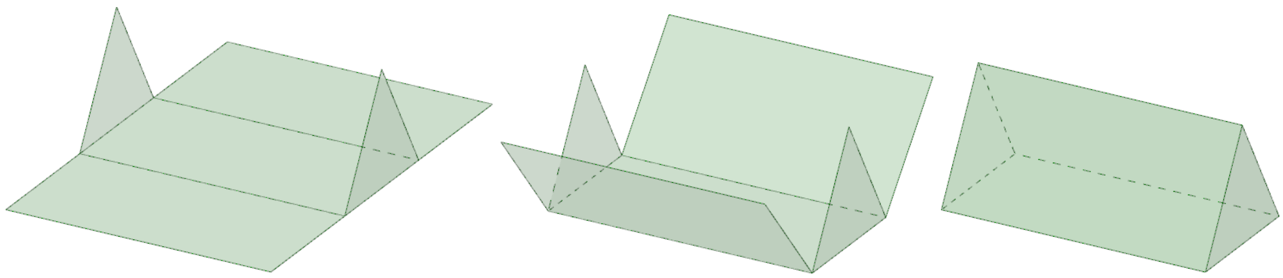


Рис. 18. Створена в GeoGebra розгортка із задачі №5 [25] з можливістю згортання в призму



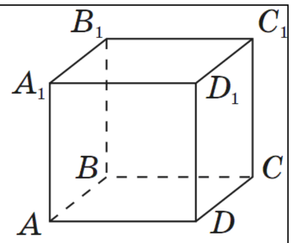
а) б) в)

Рис. 19. Процес згортання розгортки в призму, що спирається на бічну грань

Приклад 4. Задачі на взаємне розташування січних площин та прямих у кубі або прямокутному паралелепіпеді.

Задача 23 із ЗНО 2019 р. [25] (рис. 20). Задачі такого типу в літературі розглядаються, але безвідносно до ЗНО [16].

23. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою прямих та їхнім взаємним розміщенням.



Пара прямих		*Взаємне розміщення*	
1	AC і CC_1	**А**	прямі паралельні
2	AB_1 і CD_1	**Б**	прямі мимобіжні
3	AC і CD_1	**В**	прямі перетинаються і утворюють прямий кут
4	AB_1 і C_1D	**Г**	прямі перетинаються і утворюють кут 45°
		Д	прямі перетинаються і утворюють кут 60°

Рис. 20. Задача №23 із ЗНО з математики за 2019 рік [25]

На рис. 21 наведено інтерактивна 3D демонстрація для аналізу цієї задачі. Зліва на *Полотні* розташовано комбінації прямих із умови задачі. Поруч із ними знаходяться відповідні прапорці, які дозволяють відображати ці прямі на кресленні куба справа на *Полотні 3D*. На відміну від звичайного проекційного креслення на папері учень може обертати куб, роздивляючись його з різних боків та досліджуючи взаємне положення обраних прямих. Зупинивши обертання куба учень бачить, як конструкція виглядає на проекційному кресленні, тобто в умовах розв’язування задачі при здачі ЗНО. Комбінування цих двох підходів дозволяє учневі ефективно розв’язувати задачі такого типу одразу із застосуванням проекційного креслення.

Прапорці у стовпчику *Перевірка* дозволяють учневі пересвідчитись у своїй правоті стосовно взаємного розташування двох обраних прямих, або побачити свою помилку та проаналізувати її. При цьому на *Полотні 3D* безпосередньо на кресленні куба або поруч з’являються позначки або написи, які пояснюють, чому дані прямі розташовані саме так. На рис. 22 а) та б) це показано для прямих AC та CC_1. На рис. 22 а) зображені ці прямі безпосередньо, а на рис. 22 б) за допомогою відповідного прапорця показано прямий кут між ними. Саме обґрунтування цього факту учень вже повинен зробити самостійно на основі теорем стереометрії про взаємне положення прямих та площин у просторі.

В деяких випадках додається прапорець *Чому*. Це пов’язано із незвичним розташуванням прямих у кубі, що потребує додаткових побудов та коментарів. Так, на рис. 22 в) зображено взаємне розташування прямих AC та CD_1. Відповідний прапорець *Перевірка* показує кут між цими прямими – рис. 22 г). А прапорець Чому візуалізує діагональ AD_1, зафарбовує відповідний трикутник та пише, що він рівносторонній – рис. 22 д).

Оскільки прапорці взаємно незалежні, то учень одночасно може виводити кілька пар прямих перевіряючи свої гіпотези. Кнопка *Стерти* дозволяє ініціалізувати весь процес.

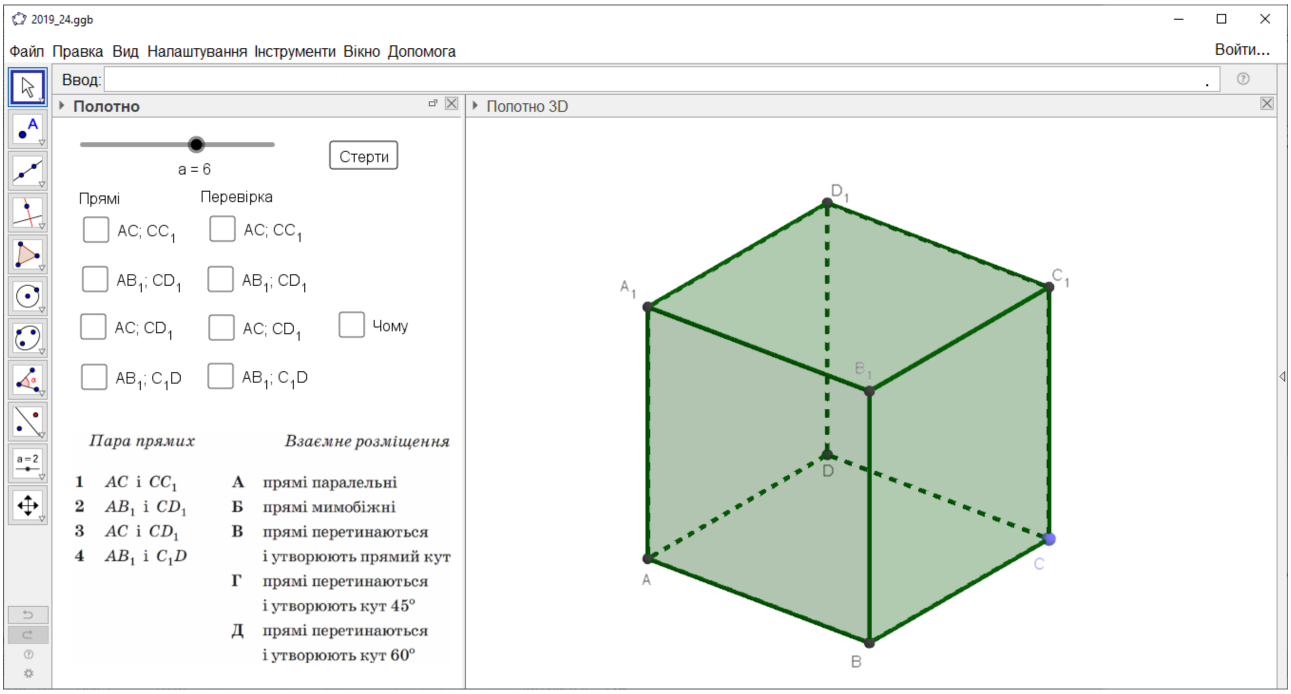
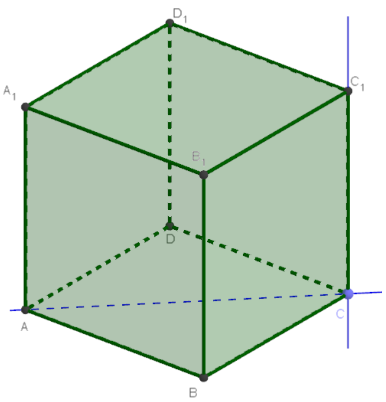
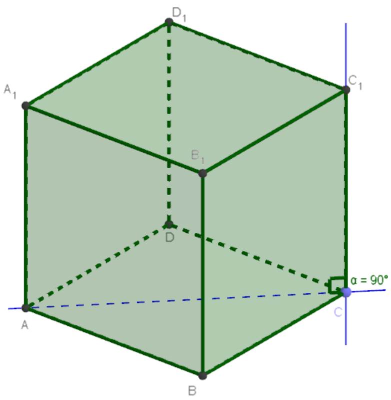


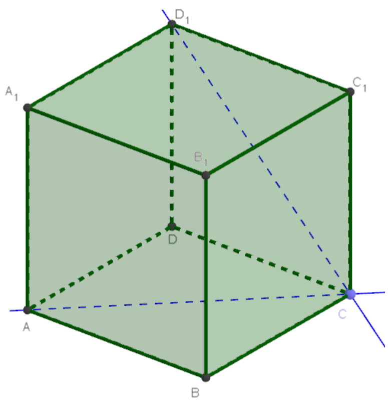
Рис. 21. Створена в GeoGebra інтерактивна 3D демонстрація для аналізу задачі №23 [25]



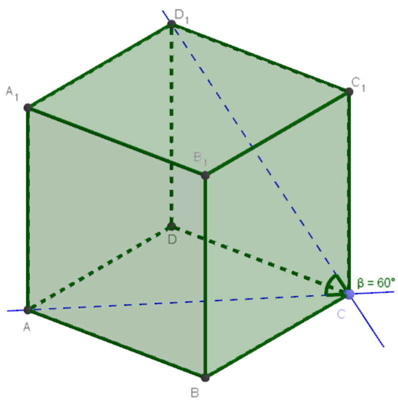
а) Показано прямі AC та CC_1



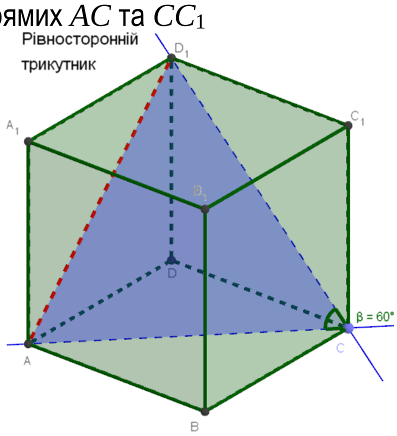
б) Перевірка взаємного розташування прямих AC та CC_1



в) Показано прямі AC та CD_1



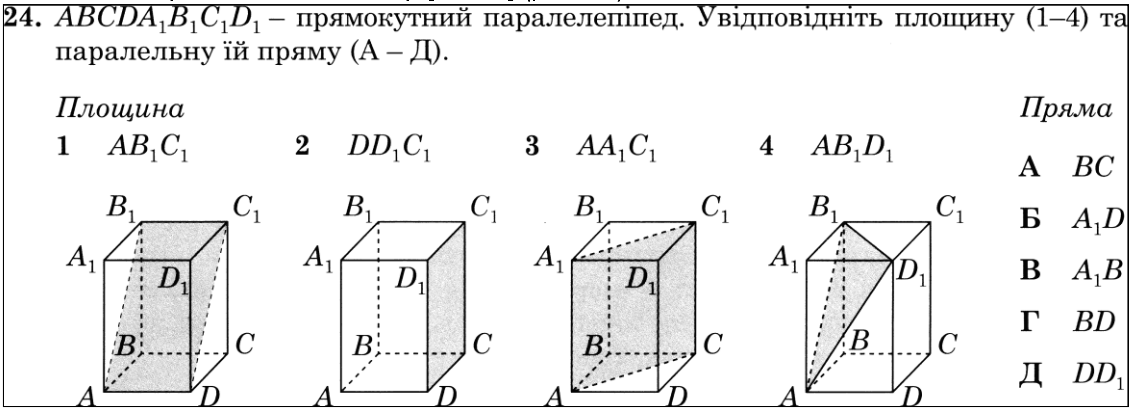
г) Перевірка взаємного розташування прямих AC та CD_1



д) Пояснення взаємного розташування прямих AC та CD_1

Рис. 22. Практична робота із задачею №23

Задача 24 із пробного ЗНО 2019 р.[14, 33] (рис. 23).



24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Увідповідніть площину (1–4) та паралельну їй пряму (А – Д).

Площина: 1 AB_1C_1; 2 DD_1C_1; 3 AA_1C_1; 4 AB_1D_1

Пряма: **А** BC; **Б** A_1D; **В** A_1B; **Г** BD; **Д** DD_1

Рис. 23. Задача №24 із пробного ЗНО з математики за 2019 рік [14]

Як і в попередній задачі тут ми також маємо інтерактивну демонстрацію (рис. 24) за допомогою якого учень може перевіряти свої висновки відносно паралельності обраних для аналізу площин та прямих.

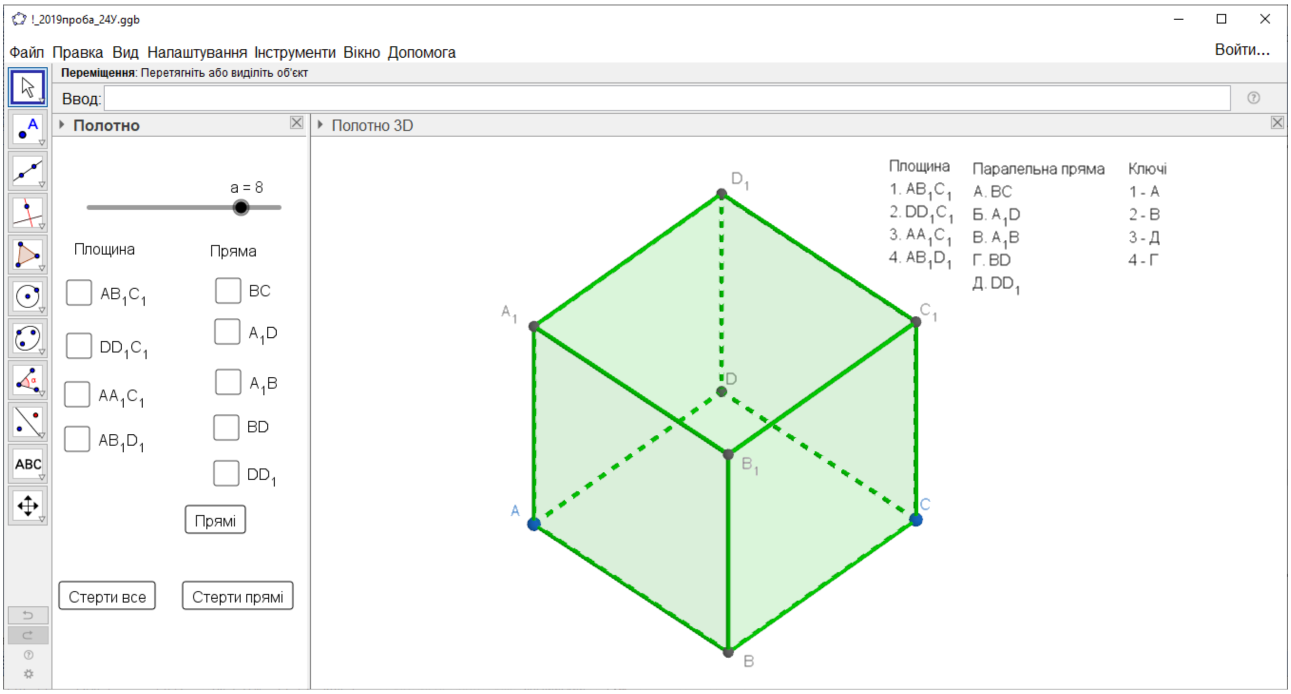
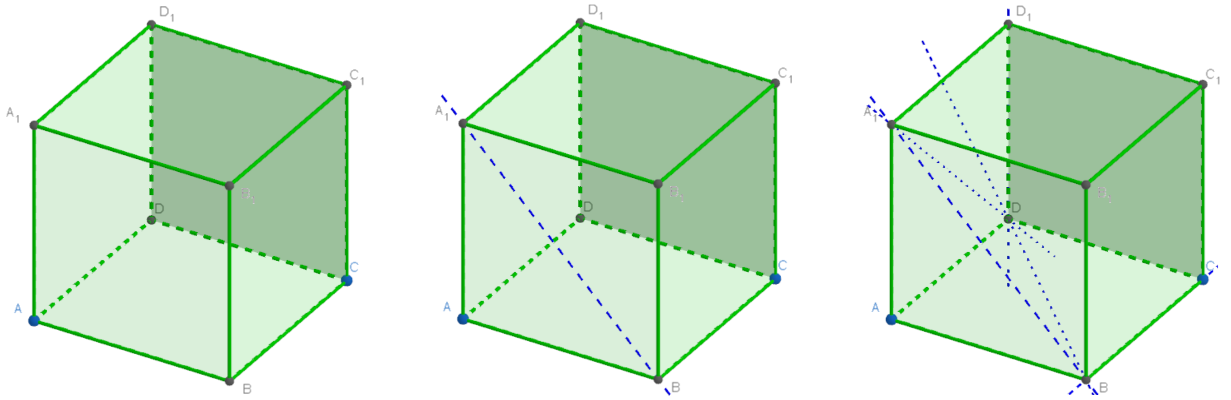


Рис. 24. Створене в GeoGebra інтерактивна 3D демонстрація
для аналізу задачі №24 із пробного ЗНО з математики за 2019 рік

При роботі з інтерактивною демонстрацією учень може відобразити певну площину, підібрати для неї в умі відповідну пряму, а потім перевірити свій вибір відобразивши цю пряму на кресленні – рис. 25 а) та б). Можна також увімкнути одну площину та всі доступні прямі, щоб подивитися, яка з них паралельна даній площині. Увімкнувши всі площини та одну пряму учень може проаналізувати її співвідношення з кожною з площин. Нагадаємо, що при виконанні цих дій учень може обертати креслення роздивляючись його з різних боків та підтверджуючи або спростовуючи свої думки.



а) Показано площину DD_1C_1

б) Показано площину DD_1C_1 та паралельну їй пряму A_1B

в) Показано площину DD_1C_1 та всі п'ять прямих

Рис. 25. Практична робота із задачею №24

IV Обговорення

Проблема розвитку в учнів просторової уяви, просторового мислення розглядається в математичній освіті постійно. Наголоси при цьому завжди робились на роботі з проекційними кресленнями та використанні просторових моделей. Але такі моделі неможливо створити для всіх задач, що розглядаються (крім того, їх треба десь зберігати), а робота із проекційними кресленнями вимагає крім постійного паралельного розвитку просторової уяви (тобто створюється замкнене коло) ще й досить вільного оперування в умі теоремами стереометрії оскільки лише за кресленням, без залучення теорем неможливо зробити висновки про взаємне розташування просторових тіл, їх елементів, оцінити величини кутів тощо. Тому поширення систем комп'ютерної геометрії (зокрема, GeoGebra) дозволяє підняти роботу з розвитку просторової уяви на якісно інший рівень.

Наявність в складі GeoGebra 3D модуля дає можливість створювати стереометричні зображення безпосередньо в просторі оперуючи при цьому просторовими категоріями так, ніби автор або користувач креслення самі безпосередньо знаходяться в просторі. Це дуже важливо та ефективно з точки розгляду розвитку в учнів просторової уяви та просторових здібностей. А можливість подальшого обертання тіл дає можливість (з урахуванням часового паралаксу) сприймати креслення так, ніби ми реально роздивляємось їх у просторі. Це надає можливість одразу бачити наслідки своїх дій (чи вірно ми робимо, чи ні), оцінювати реальні положення й розміри тіл та їх елементів (особливо кутів) тощо.

Таким чином, ці можливості можна ефективно використовувати для візуалізації навчального матеріалу стереометричних задач ЗНО та його подальшого аналізу, обговорення, роботи з учнями або їх самостійної роботи з цим матеріалом.

Нажаль, використання систем динамічної геометрії у навчальному процесі та підготовці до ЗНО не носить системного характеру. GeoGebra, наприклад, використовується час від часу вчителями та учнями. Але робиться це, як правило, з їхньої власної ініціативи. Тому дуже актуальним є розширення використання тієї є GeoGebra для формування просторової уяви, що сприятиме покращанню оволодіння стереометрією.

Дуже важливим є не тільки створення динамічних візуалізацій для різних задач та теорем, а й їх супроводження відповідними методичними матеріалами – детальними інструкціями для вчителів та учнів. В них треба вказувати що та як робити з візуалізаціями, куди дивитись, що очікувати від зміни параметрів тощо. Це дуже важливо, оскільки учні в своїй масі не мають досвіду роботи з такими демонстраціями. Вони їх часто сприймають як деякий мультфільм, аніме тощо. А вони повинні навчитись концентрувати увагу на тих чи інших елементах, акуратно виконувати обертання й т. і. Нажаль, матеріалів такого типу майже немає. А наочність працює лише в комплексі.

Крім того, є велика потреба в створенні єдиного банка таких демонстрацій. Деяку спробу агрегатора взяла на себе книга [21]. Але на сьогодні матеріали розкидані, різної якості.

Про важливість використання запропонованого підходу свідчить і той факт, що задачу на розпізнавання просторових тіл (№5 за 2019 р.), було з невеликою корекцією (змінено порядок варіантів відповідей) в 2022 р. надано учасникам Національного мультипредметного тесту (задача №3 блоку «Математика») [13]. Цю задачу було розв'язано з гіршим результатом (90,9% у порівнянні із 94,6% у 2019 р.) при більшій кількості тих, хто це завдання взагалі не виконував (їх кількість збільшилась на 9%). Відхилення від 2019 р. незначні, але не в бік покращення результату. Задачу №18 із НМТ повністю розв'язали близько третини учасників. Хоча вона й не складна – потребує лише акуратної розстановки координат у вершинах куба. Все це свідчить про необхідність використання комплексного когнітивно-візуального підходу до аналізу, розв'язування, розбору стереометричних задач ЗНО, а забезпечуватись цей підхід має комплексно – системами комп'ютерної геометрії, зокрема, GeoGebra, та відповідною методичною підтримкою.

V Висновки

В роботі на добірці прикладів задач ЗНО з математики продемонстровано можливість використання системи комп'ютерної геометрії GeoGebra для створення 3D демонстрацій з метою розвинення просторової уяви, просторового мислення та просторових здібностей учнів. При цьому наголошується на обов'язковому супроводженні таких демонстрацій детальними рекомендаціями для вчителів та учнів стосовно їх опрацювання у відповідності із вимогами когнітивно-візуального підходу.

Додатковою перевагою використання GeoGebra для роботи зі стереометрією є ще й те, що є її версії для різних операційних систем. В тому числі й для мобільних пристроїв. Тому ця комп'ютерна програма може завждиноситися з собою (на ноутбуці, планшеті, телефоні) та використовуватись у будь-якому придатному для цього місці.

Подальші дослідження допоможуть підвищити ефективність використання системи комп'ютерної геометрії GeoGebra у навчальному процесі в будь яких його формах.

Бібліографічні посилання

1. GeoGebra for Teaching and Learning Math : Free digital tools for class activities, graphing, geometry, collaborative whiteboard and more. URL: https://www.geogebra.org/ (дата звернення: 10.02.2023).
2. Developing Thinking in Geometry / Ed. by S. Johnston-Wilder, J. Mason. Melksham,Wiltshire : SAGE Publications Ltd. 2005. 288 pp. URL: https://ru.scribd.com/doc/304756159/Developing-Thinking-in-Geometry (дата звернення: 18.05.2022).
3. Coxeter H. S. M., Greitzer S. L. Geometry Revisited. Washington, DC : MAA, 1967. 193 pp. URL: https://www.math.unipd.it/~legovini/Coxeter_Greitzer_Geometry_revisited.pdf (дата звернення: 10.02.2023).
4. José Manuel Dos Santos Dos Santos. Implicit Curves Intersection of Two Surfaces in GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo. 2017. V.6, No.2, P 04–09. URL: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35462/24310 (дата звернення: 10.02.2023).
5. Nurlia Elfa, M. Ikhsan, Marwan. Students' Spatial Ability through Geogebra-Assisted Discovery Learning Model // The 2nd Science and Mathematics International Conference (SMIC 2020). AIP Conference Proceedings 2331, P. 020020-1–020020-7. Published Online: 02 April 2021. https://doi.org/10.1063/5.0045494 (дата звернення: 10.02.2023).
6. Ziatdinov R., Valles J. R., Jr. Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics. Mathematics. 2022. V. 10 No. 3. P. 398. URL: https://doi.org/10.3390/math10030398 (дата звернення: 10.02.2023).
7. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія : підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. Вид. 2-ге, перероб. Київ : Освіта, 2021. 273 с.
8. Ботузова Ю. В. Динамічні моделі GeoGebra на уроках математики як основа STEM-підходу. Фізико-математична освіта. 2018. №3 (17). С. 31–35. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dinamichni-modeli-geogebra-na-urokah-matematiki-yak-osnova-stem-pidhodu (дата звернення: 09.02.2023).
9. Водолаженко О. В. Геометричні побудови в просторі // Проблеми викладання математики у закладах освіти: теорія, методика, практика : тези доповідей II міжнар. конф. (м. Харків, 23–25 берез.). Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. С. 44–47.
10. Водолаженко О. В. Дидактичні можливості пакета динамічної геометрії GeoGebra з навчання майбутніх учителів математики // Сучасна математична освіта: методологія, теорія, практика : колективна монографія / за заг. ред. О. А. Жерновникової. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2021. С.219–238.
11. Дем'янюк Л. Завдання з параметром (ЗНО). URL: https://www.geogebra.org/m/xaur8eua (дата звернення: 27.01.2023)
12. Єршова А., Голобородько В., Крижановський О., Єршов С. Геометрія : підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. Харків : Ранок, 2021. 255 с.
13. Звіт про результати національного мультипредметного тесту у 2022 році : Київ : УЦОЯО, 2022. 110 с. URL: http://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2023/02/Zvit_NMT_2022_na-sajt.pdf (дата звернення: 03.003.2023)
14. ЗНО онлайн 2019 року з математики – пробний тест : Завдання 24 з 33. *ЗНО-ОНЛАЙН : ЗНО онлайн з математики.* URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/337/ (дата звернення: 27.01.2023)

15. ЗНО онлайн 2019 року з математики – пробний тест : Завдання 26 з 33. *ЗНО-ОНЛАЙН : ЗНО онлайн з математики.* URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/337/ (дата звернення: 25.01.2023)
16. Іванова Л. Кут між прямими. № 8.2 до підручника Мерзляка А.Г. «Геометрія. 10 клас. Профільний рівень», 2018 рік. URL: https://www.geogebra.org/m/mwdkdety (дата звернення: 27.01.2023).
17. Іванова Л. Модель GeoGebra до завдання №32 ЗНО із математики 2012 року ІІ сесії. URL: https://www.geogebra.org/m/cz4cpA8M (дата звернення: 27.01.2023).
18. Іванова Л. Модель GeoGebra до завдання №33 ЗНО із математики 2017 року. URL:https://www.geogebra.org/m/BVg2PFW2 (дата звернення: 27.01.2023).
19. Іванова Л. Модель GeoGebra до завдання №34 ЗНО із математики 2010 року. URL: https://www.geogebra.org/m/sAGvWAZe (дата звернення: 27.01.2023).
20. Іванова Л. Модель GeoGebra до завдання №34 ЗНО із математики 2014 року. URL: https://www.geogebra.org/m/cz4cpA8M (дата звернення: 27.01.2023).
21. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навчальний посібник /, Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. ак. АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. – 444 с.
22. Методичні вказівки до теми: «ПІДГОТОВКА ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ» (2019 рік). *Національна освітня платформа «Всеосвіта».* URL: https://vseosvita.ua/library/vsi-zno-z-matematiki-u-2017-2019-rokah-umovi-ta-rozvazki-199372.html (дата звернення: 26.01.2023)
23. Нелін Є. П. Геометрія у таблицях : навч. посіб. для учнів 7–11 кл. Вид. 8-ме. Харків : Гімназія, 2019. 80 с.
24. Офіційний звіт про проведення в 2018 році зовнішнього незалежно оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти : в 2 т. Київ : УЦОЯО, 2018. Т. 2. 350 с. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2018/08/ZVIT-ZNO_2018-Tom_2.pdf (дата звернення: 27.01.2023)
25. Офіційний звіт про проведення в 2019 році зовнішнього незалежно оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти : в 2 т. Київ : УЦОЯО, 2019. Т. 2. 360 с. URL: http://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/08/ZVIT-ZNO_2019-Tom_2.pdf (дата звернення: 27.01.2023)
26. Офіційний звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів у 2013 р. : Київ : УЦОЯО, 2013. 480 с. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/01/Report2013.pdf (дата звернення: 27.01.2023)
27. Офіційний звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень осіб, які виявили бажання вступати до вищих навчальних закладів України в 2014 році : в 2 т. Київ : УЦОЯО, 2014. Т. 2. 338 с. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/Report2014_Tom_2.pdf (дата звернення: 27.01.2023)
28. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти : Наказ Міністерства освіти і науки України від 04.12.2019 р. № 1513. URL: http://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/12/nakaz-1513_04.12_programa_matematyka.pdf (дата звернення: 25.01.2023).
29. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії. Інформаційні технології і засоби навчання. 2014. Т. 44, №6. С.124–133.
30. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Побудова геометричних місць точок з використанням програм динамічної математики. Фізико-математична освіта. 2016. №1 (7). С. 127–133. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2016-v1-7/2016_1-7-Semenikhina_Drushlyak_FMO.pdf (дата звернення: 22.02.2023).
31. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Практика використання параметричного кольору в програмах динамічної математики при розв'язуванні задач на ГМТ. Фізико-математична освіта. 2015. №2 (5). С. 65–72. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2015-v2-5/2015_2-5-SemenikhinaDrushlyak_Scientific_journal_F.pdf (дата звернення: 22.02.2023).
32. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Принцип когнітивної візуалізації і його використання у навчанні математики. Фізико-математична освіта. 2017. №3 (13). С. 136–140. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2017-v3-13/2017_3-13-SemenikhinaDrushlyak_Scientific_jou.pdf (дата звернення: 22.02.2023).
33. Тестовий зошит «Пробне ЗНО-2019 з математики». *Національна освітня платформа «Всеосвіта».* URL: https://vseosvita.ua/library/testovij-zosit-probne-zno-2019-z-matematiki-124070.html (дата звернення: 26.01.2023).
34. Hung-Hsi Wu (2016). Teaching School Mathematics: Pre-Algebra. Chapter 4. Experimental geometry. *AMS Non-Series Monographs*. Volume 98. ISBNs: 978-1-4704-2720-7 (print); 978-1-4704-3009-2 (online). DOI: https://doi.org/10.1090/mbk/098

References

1. GeoGebra for Teaching and Learning Math : Free digital tools for class activities, graphing, geometry, collaborative whiteboard and more. URL: https://www.geogebra.org/ (accessed: 10.02.2023).
2. Developing Thinking in Geometry (2005) / Ed. by S. Johnston-Wilder, J. Mason. Melksham,Wiltshire : SAGE Publications Ltd. 2005. 288 pp. URL: https://ru.scribd.com/doc/304756159/Developing-Thinking-in-Geometry (accessed: 18.05.2022).
3. Coxeter H. S. M., Greitzer S. L. (1967) Geometry Revisited. Washington, DC : MAA, 1967. 193 pp. URL: https://www.math.unipd.it/~legovini/Coxeter_Greitzer_Geometry_revisited.pdf (accessed: 10.02.2023).

4. José Manuel Dos Santos Dos Santos. (2017) Implicit Curves Intersection of Two Surfaces in GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo. 2017. V.6, No.2, P 04–09. URL: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35462/24310 (accessed: 10.02.2023).
5. Nurlia Elfa, M. Ikhsan, Marwan. (2021) Students' Spatial Ability through Geogebra-Assisted Discovery Learning Model // The 2nd Science and Mathematics International Conference (SMIC 2020). AIP Conference Proceedings 2331, P. 020020-1–020020-7. Published Online: 02 April 2021. https://doi.org/10.1063/5.0045494 (accessed: 10.02.2023).
6. Ziatdinov R., Valles J. R., Jr. (2022) Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics. Mathematics. 2022. V. 10 No. 3. P. 398. URL: https://doi.org/10.3390/math10030398 (accessed: 10.02.2023).
7. Bevz G. P., Bevz V. G., Vladimirova N. G. (2021) Geometriya : pidruchnik dlya 8 klasu zakladiv zagalnoyi serednoyi osviti. Vid. 2-ge, pererobl. Kiyiv : Osvita, 2021. 273 p. [in Ukrainian]
8. Botuzova Yu. V. (2018) Dinamichni modeli GeoGebra na urokah matematiki yak osnova STEM-pidhodu. Fiziko-matematichna osvita. 2018. №3 (17). pp. 31–35. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dinamichni-modeli-geogebra-na-urokah-matematiki-yak-osnova-stem-pidhodu (accessed: 09.02.2023). [in Ukrainian]
9. Vodolazhenko O. V. (2021) Geometrichni pobudovi v prostori // Problemi vikladannya matematiki u zakladah osviti: teoriya, metodika, praktika : tezi dopovidej II mizhnar. konf. (m. Harkiv, 23–25 berez.). Harkiv : HNU imeni V. N. Karazina, 2021. pp. 44–47. [in Ukrainian]
10. Vodolazhenko O. V. (2021) Didaktichni mozhlivosti paketa dinamichnoyi geometriyi GeoGebra z navchannya majbutnih uchiteliv matematiki // Suchasna matematichna osvita: metodologiya, teoriya, praktika : kolektivna monografiya / za zag. red. O. A. Zhernovnikovoyi. Harkiv : HNPU imeni G. S. Skovorodi, 2021. pp.219–238. [in Ukrainian]
11. Dem'yanyuk L. (2023) Zavdannya z parametrom (ZNO). URL: https://www.geogebra.org/m/xaur8eua (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
12. Yershova A., Goloborodko V., Krizhanovskij O., Yershov S. (2021) Geometriya : pidruchnik dlya 8 klasu zakladiv zagalnoyi serednoyi osviti. Vid. 2-ge, pererobl. Harkiv : Ranok, 2021. 255 p. [in Ukrainian]
13. Zvit pro rezultati nacionalnogo multipredmetnogo testu u 2022 roci (2022) : Kiyiv : UCOYaO, 2022. 110 p. URL: http://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2023/02/Zvit_NMT_2022_na-sajt.pdf (accessed: 03.003.2023). [in Ukrainian]
14. ZNO onlajn 2019 roku z matematiki – probnij test (2019) : Zavdannya 24 z 33. ZNO-ONLAJN : ZNO onlajn z matematiki. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/337/ (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
15. ZNO onlajn 2019 roku z matematiki – probnij test (2019) : Zavdannya 26 z 33. ZNO-ONLAJN : ZNO onlajn z matematiki. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/337/ (accessed: 25.01.2023). [in Ukrainian]
16. Ivanova L. (2018) Kut mizh pryamimi. № 8.2 do pidruchnika Merzlyaka A.G. «Geometriya. 10 klas. Profilnij riven», 2018 rik. URL: https://www.geogebra.org/m/mwdkdety (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
17. Ivanova L. (2012) Model GeoGebra do zavdannya №32 ZNO iz matematiki 2012 roku II sesiyi. URL: https://www.geogebra.org/m/cz4cpA8M (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
18. Ivanova L. (2017) Model GeoGebra do zavdannya №33 ZNO iz matematiki 2017 roku. URL:https://www.geogebra.org/m/BVg2PFW2 (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
19. Ivanova L. (2010) Model GeoGebra do zavdannya №34 ZNO iz matematiki 2010 roku. URL: https://www.geogebra.org/m/sAGvWAZe (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
20. Ivanova L. (2014) Model GeoGebra do zavdannya №34 ZNO iz matematiki 2014 roku. URL: https://www.geogebra.org/m/cz4cpA8M (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
21. Innovacijni informacijno-komunikacijni tehnologiyi navchannya matematiki (2019) : navchalnij posibnik /, T. G. Kramarenko, V. V. Korolskij S. O. Semerikov, S. V. Shokalyuk ; nauk. red. ak. APN Ukrayini, d.ped.n., prof. M. I. Zhaldak. Vid. 2, pererob. i dop. Krivij Rig : Krivorizkij derzh. ped. un-t, 2019. – 444 p. [in Ukrainian]
22. Metodichni vkazivki do temi: «PIDGOTOVKA DO ZNO Z MATEMATIKI» (2019 rik). Nacionalna osvitnya platforma «Vseosvita». URL: https://vseosvita.ua/library/vsi-zno-z-matematiki-u-2017-2019-rokah-umovi-ta-rozvazki-199372.html (accessed: 26.01.2023). [in Ukrainian]
23. Nelin Ye. P. (2019) Geometriya u tablicyah : navch. posib. dlya uchniv 7–11 kl. Vid. 8-me. Xarkiv : Gimnaziya, 2019. 80 p. [in Ukrainian]
24. Oficijnij zvit pro provedennya v 2018 roci zovnishnogo nezalezhno ocinyuvannya rezultativ navchannya, zdobutih na osnovi povnoyi zagalnoyi serednoyi osviti (2018) : v 2 t. Kiyiv : UCOYaO, 2018. T. 2. 350 p. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2018/08/ZVIT-ZNO_2018-Tom_2.pdf (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
25. Oficijnij zvit pro provedennya v 2019 roci zovnishnogo nezalezhno ocinyuvannya rezultativ navchannya, zdobutih na osnovi povnoyi zagalnoyi serednoyi osviti (2019) : v 2 t. Kiyiv : UCOYaO, 2019. T. 2. 360 p. URL: http://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/08/ZVIT-ZNO_2019-Tom_2.pdf (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
26. Oficijnij zvit pro provedennya zovnishnogo nezalezhnogo ocinyuvannya navchalnih dosyagnen vipusknikiv zagalnoosvitnih navchalnih zakladiv u 2013 r. (2013) : Kiyiv : UCOYaO, 2013. 480 p. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/01/Report2013.pdf (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
27. Oficijnij zvit pro provedennya zovnishnogo nezalezhnogo ocinyuvannya navchalnih dosyagnen osib, yaki viyavili bazhannya vstupati do vishih navchalnih zakladiv Ukrayini v 2014 roci (2014) : v 2 t. Kiyiv : UCOYaO, 2014. T. 2. 338 p. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/Report2014_Tom_2.pdf (accessed: 27.01.2023). [in Ukrainian]
28. Programa zovnishnogo nezalezhnogo ocinyuvannya rezultativ navchannya z matematiki, zdobutih na osnovi povnoyi zagalnoyi serednoyi osviti (2019) : Nakaz Ministerstva osviti i nauki Ukrayini vid 04.12.2019 r. № 1513. URL:

http://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/12/nakaz-1513_04.12_programa_matematyka.pdf (accessed: 25.01.2023). [in Ukrainian]

29. Semenihina O. V., Drushlyak M. G. (2014) Instrumentarij programi GeoGebra 5.0 i jogo vikoristannya dlya rozv'yazuvannya zadach stereometriyi. Informacijni tehnologiyi i zasobi navchannya. 2014. T. 44, №6. pp.124–133. [in Ukrainian]
30. Semenihina O. V., Drushlyak M. G. (2016) Pobudova geometrichnih misc tochok z vikoristannyam program dinamichnoyi matematiki. Fiziko-matematichna osvita. 2016. №1 (7). pp. 127–133. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2016-v1-7/2016_1-7-Semenikhina_Drushlyak_FMO.pdf (accessed: 22.02.2023). [in Ukrainian]
31. Semenihina O. V., Drushlyak M. G. (2015) Praktika vikoristannya parametrichnogo koloru v programah dinamichnoyi matematiki pri rozv'yazuvanni zadach na GMT. Fiziko-matematichna osvita. 2015. №2 (5). pp. 65–72. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2015-v2-5/2015_2-5-SemenikhinaDrushlyak_Scientific_journal_F.pdf (accessed: 22.02.2023). [in Ukrainian]
32. Semenihina O. V., Drushlyak M. G. (2017) Princip kognitivnoyi vizualizaciyi i jogo vikoristannya u navchanni matematiki. Fiziko-matematichna osvita. 2017. №3 (13). pp. 136–140. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2017-v3-13/2017_3-13-SemenikhinaDrushlyak_Scientific_jou.pdf (accessed: 22.02.2023). [in Ukrainian]
33. Testovij zoshit «Probne ZNO-2019 z matematiki». Nacionalna osvitnya platforma «Vseosvita» (2019). URL: https://vseosvita.ua/library/testovij-zosit-probne-zno-2019-z-matematiki-124070.html (accessed: 26.01.2023). [in Ukrainian]
34. Hung-Hsi Wu (2016). Teaching School Mathematics: Pre-Algebra. Chapter 4. Experimental geometry. *AMS Non-Series Monographs*. Volume 98. ISBNs: 978-1-4704-2720-7 (print); 978-1-4704-3009-2 (online). DOI: https://doi.org/10.1090/mbk/098

Кунічева Тетяна Петрівна.
Завідувач навчально-методичною лабораторією,
ВСП «Харківський торговельно-економічний фаховий коледж Державного торговельно-економічного університету», пров. О. Яроша, 8, м. Харків, Україна, 61045.
Тел. (050)-951-8110. E-mail: tatkunicheva1@gmail.com

Kunicheva Tetiana Petrivna.
Head of the Educational and Methodical Laboratory,
Separate structural unit "Kharkiv Trade and Economics College of the State Trade and Economics University", Otakar Jaroš lane, 8, Kharkiv, Ukraine, 61045.
Phone: (050)-951-8110. E-mail: tatkunicheva1@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6545-348X

Citation (APA):
Kunicheva T. (2023). Preparing students for solving geometric problems of the EIA in mathematics by means of GeoGebra. Engineering and Educational Technologies, 11 (1), 46–66. doi: https://doi.org/10.32782/2307-9770.2023.11.01.04

Цитування (ДСТУ 8302:2015):
Кунічева Т. П. Підготовка здобувачів освіти до розв'язування геометричних задач ЗНО з математики засобами GeoGebra / Інженерні та освітні технології. 2023. Т. 11. № 1. С. 46–66. doi: https://doi.org/10.32782/2307-9770.2023.11.01.04

Обсяг статті: сторінок – 21 ; умовних друк. аркушів – 3,042.